Series OSR/1/C

कोड नं. **65/1/1**
Code No.

रोल नं.
Roll No.

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **11** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **11** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **29** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minutes time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे | *अधिकतम अंक : 100*

Time allowed : 3 hours | *Maximum Marks : 100*

सामान्य निर्देश :

(i) **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं ।

(ii) इस प्रश्न पत्र में **29** प्रश्न हैं जो तीन खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब तथा स । खण्ड अ में **10** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **एक अंक** का है । खण्ड ब में **12** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **चार अंक** का है । खण्ड स में **7** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **छः अंक** का है ।

(iii) खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकता अनुसार दिए जा सकते हैं ।

(iv) पूर्ण प्रश्न पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी चार अंकों वाले 4 प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले 2 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प है । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है ।

(v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति **नहीं** है । यदि आवश्यक हो तो आप लघुगणकीय सारणियाँ माँग सकते हैं ।

General Instructions :

(i) ***All*** *questions are compulsory.*

(ii) *The question paper consists of* ***29*** *questions divided into three sections A, B and C. Section A comprises of* ***10*** *questions of* ***one mark*** *each, Section B comprises of* ***12*** *questions of* ***four marks*** *each and Section C comprises of* ***7*** *questions of* ***six marks*** *each.*

(iii) *All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.*

(iv) *There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 4 questions of four marks each and 2 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.*

(v) *Use of calculators is* ***not*** *permitted. You may ask for logarithmic tables, if required.*

खण्ड अ

SECTION A

प्रश्न संख्या 1 से 10 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।

Question numbers 1 to 10 carry 1 mark each.

1. माना कि समुच्चय A = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, में R = {(a, b) : संख्या 2, (a – b) को विभाजित करती है} द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध एक तुल्यता सम्बन्ध है । तुल्यता वर्ग [0] को लिखिए ।

Let R be the equivalence relation in the set A = {0, 1, 2, 3, 4, 5} given by R = {(a, b) : 2 divides (a – b)}. Write the equivalence class [0].

2. सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ का सदिश $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ पर प्रक्षेप लिखिए ।

Write the projection of the vector $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ on the vector $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$.

3. 2×2 का एक आव्यूह लिखिए जो सममित तथा विषम-सममित आव्यूह दोनों हो ।

Write a 2×2 matrix which is both symmetric and skew-symmetric.

4. एक बिन्दु P(a, b, c) की x-अक्ष से दूरी लिखिए ।

Write the distance of a point P(a, b, c) from x-axis.

5. सदिश $\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ के अनुदिश एक ऐसा सदिश लिखिए जिसका परिमाण 9 इकाई हो ।

Write a vector in the direction of the vector $\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ that has magnitude 9 units.

6. $\cos^{-1}[\cos(680°)]$ का मुख्य मान लिखिए ।

Write the principal value of $\cos^{-1}[\cos(680°)]$.

7. यदि $\begin{bmatrix} x \cdot y & 4 \\ z+6 & x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & w \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, तो $(x + y + z)$ का मान लिखिए ।

If $\begin{bmatrix} x \cdot y & 4 \\ z+6 & x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & w \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, write the value of $(x + y + z)$.

8. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \, dx$$

Find :

$$\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \, dx$$

9. $\cos x$ के सापेक्ष $\sin x$ का अवकलज लिखिए ।

Write the derivative of $\sin x$ w.r.t. $\cos x$.

10. सारणिक $\begin{vmatrix} p & p+1 \\ p-1 & p \end{vmatrix}$ का मान लिखिए ।

Write the value of the determinant $\begin{vmatrix} p & p+1 \\ p-1 & p \end{vmatrix}$.

खण्ड ब

SECTION B

प्रश्न संख्या 11 से 22 तक प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है ।

Question numbers 11 to 22 carry 4 marks each.

11. मान लीजिए कि परिमेय संख्याओं के समुच्चय S (1 को छोड़कर) में निम्नलिखित प्रकार से $*$ परिभाषित है :

$a * b = a + b - ab$, सभी $a, b \in S$ के लिए

सिद्ध कीजिए कि

(i) $*$ S पर एक द्विआधारी संक्रिया है ।

(ii) संक्रिया $*$ क्रमविनिमेय व साहचर्य है ।

Let S be the set of all rational numbers except 1 and $*$ be defined on S by $a * b = a + b - ab$, for all $a, b \in S$.

Prove that

(i) $*$ is a binary operation on S.

(ii) $*$ is commutative as well as associative.

12. दर्शाइए कि :

$$\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right) = \frac{x}{2},\quad x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

अथवा

x के लिए हल कीजिए :

$$2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\,\mathrm{cosec}\, x)$$

Show that :

$$\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right) = \frac{x}{2},\quad x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

OR

Solve for x :

$$2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\,\mathrm{cosec}\, x)$$

13. सारणिकों के गुणधर्मों के प्रयोग से, निम्न को सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(bc+ca+ab)$$

Using properties of determinants, prove the following :

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(bc+ca+ab)$$

14. यदि $x = a(\cos t + t \sin t)$ तथा $y = a(\sin t - t \cos t)$ है, तो $t = \frac{\pi}{4}$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

If $x = a(\cos t + t \sin t)$ and $y = a(\sin t - t \cos t)$, then find the value of $\frac{d^2y}{dx^2}$ at $t = \frac{\pi}{4}$.

15. यदि $(x-y) \cdot e^{\frac{x}{x-y}} = a$, तो सिद्ध कीजिए कि $y\frac{dy}{dx} + x = 2y$.

If $(x-y) \cdot e^{\frac{x}{x-y}} = a$, prove that $y\frac{dy}{dx} + x = 2y$.

16. एक वृत्त और एक वर्ग के परिमापों का योगफल k है, जहाँ k एक अचर है । सिद्ध कीजिए कि उनके क्षेत्रफलों का योगफल न्यूनतम है, जब वर्ग की भुजा वृत्त की त्रिज्या की दुगुनी है ।

अथवा

अवकल का प्रयोग करके, $(3{\cdot}968)^{3/2}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए ।

The sum of the perimeters of a circle and a square is k, where k is some constant. Prove that the sum of their areas is least when the side of the square is double the radius of the circle.

OR

Using differentials, find the approximate value of $(3{\cdot}968)^{3/2}$.

17. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx$$

अथवा

ज्ञात कीजिए :

$$\int (x+3)\sqrt{3-4x-x^2}\, dx$$

Evaluate :

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx$$

OR

Find :

$$\int (x+3)\sqrt{3-4x-x^2}\, dx$$

18. यदि $y(x)$ अवकल समीकरण $\left(\frac{2+\sin x}{1+y}\right)\frac{dy}{dx} = -\cos x$ का एक हल है और $y(0) = 1$ है, तो $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

If $y(x)$ is a solution of the differential equation $\left(\frac{2+\sin x}{1+y}\right)\frac{dy}{dx} = -\cos x$ and $y(0) = 1$, then find the value of $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

19. अवकल समीकरण $(x-y)\frac{dy}{dx} = x + 2y$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए ।

Find the general solution of the differential equation $(x-y)\frac{dy}{dx} = x + 2y$.

20. रेखा $\frac{x+2}{2} = \frac{2y-7}{6} = \frac{5-z}{6}$ के दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए । एक ऐसी रेखा का सदिश समीकरण भी ज्ञात कीजिए जो बिन्दु A(–1, 2, 3) से होकर गुज़रती हो और दी गई रेखा के समान्तर हो ।

Find the direction cosines of the line $\frac{x+2}{2} = \frac{2y-7}{6} = \frac{5-z}{6}$. Also, find the vector equation of the line through the point A(–1, 2, 3) and parallel to the given line.

21. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{k}$, $\vec{c} = 2\hat{j} - \hat{k}$ तीन सदिश हैं, तो एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके विकर्ण $(\vec{a} + \vec{b})$ तथा $(\vec{b} + \vec{c})$ हैं ।

अथवा

यदि तीन सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ समतलीय हैं, तो सिद्ध कीजिए कि सदिश $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$ तथा $\vec{c} + \vec{a}$ भी समतलीय होंगे ।

If $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{k}$, $\vec{c} = 2\hat{j} - \hat{k}$ are three vectors, find the area of the parallelogram having diagonals $(\vec{a} + \vec{b})$ and $(\vec{b} + \vec{c})$.

OR

If the three vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ and $\vec{c}$ are coplanar, prove that the vectors $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$ and $\vec{c} + \vec{a}$ are also coplanar.

22. एक थैले में 3 लाल व 7 काली गेंदें हैं । दो गेंदें यादृच्छया एक-एक करके (बिना वापस किए) निकाली जाती हैं । यदि दूसरी गेंद लाल हो, तो पहली गेंद के भी लाल रंग के होने की प्रायिकता क्या होगी ?

A bag contains 3 red and 7 black balls. Two balls are selected at random one-by-one without replacement. If the second selected ball happens to be red, what is the probability that the first selected ball is also red ?

खण्ड स

SECTION C

प्रश्न संख्या 23 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं ।

Question numbers 23 to 29 carry 6 marks each.

23. वक्र $y = x^2 - 2x + 7$ पर बनी स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो (i) रेखा $2x - y + 9 = 0$ के समांतर हो, (ii) रेखा $5y - 15x = 13$ के लम्बवत् हो ।

Find the equation of the tangent line to the curve $y = x^2 - 2x + 7$ which is (i) parallel to the line $2x - y + 9 = 0$, (ii) perpendicular to the line $5y - 15x = 13$.

24. समाकलन विधि से, निम्न वक्रों से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

$$y = |x + 1| + 1, \; x = -3, \; x = 3, \; y = 0$$

Using integration, find the area of the region bounded by the curves :

$$y = |x + 1| + 1, \; x = -3, \; x = 3, \; y = 0$$

25. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} \, dx$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx$$

Find :

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} \, dx$$

OR

Evaluate :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx$$

26. बिन्दु (1, 2, – 4) से होकर गुज़रने वाले उस समतल के सदिश व कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो निम्न रेखाओं के समान्तर है

$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ तथा

$\vec{r} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k} + \mu(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$

इस प्रकार प्राप्त समतल से बिन्दु (9, – 8, – 10) की दूरी भी ज्ञात कीजिए ।

Find the vector and cartesian forms of the equation of the plane passing through the point (1, 2, – 4) and parallel to the lines

$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ and

$\vec{r} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k} + \mu(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$.

Also, find the distance of the point (9, – 8, – 10) from the plane thus obtained.

27. एक सिक्के को उछालने के प्रयोग पर विचार कीजिए । यदि सिक्के पर चित प्रकट हो तो सिक्के को पुनः उछालें, परन्तु यदि सिक्के पर पट प्रकट हो, तो एक पासे को फेंकें । यदि घटना ‘कम-से-कम एक पट प्रकट होना’ का घटित होना दिया गया है, तो घटना ‘पासे पर 4 से बड़ी संख्या प्रकट होना’ की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

अथवा

एक व्यक्ति के बारे में ज्ञात है कि वह 5 में से 3 बार सत्य बोलता है । वह एक पासे को उछालता है और कहता है कि ‘1’ आया है । वास्तव में ‘1’ के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

Consider the experiment of tossing a coin. If the coin shows head, toss it again, but if it shows tail, then throw a die. Find the conditional probability of the event that ‘the die shows a number greater than 4’ given that ‘there is at least one tail’.

OR

A man is known to speak the truth 3 out of 5 times. He throws a die and reports that it is ‘1’. Find the probability that it is actually 1.

28. कुल ₹ 7,000 की धनराशि, तीन अलग-अलग बचत बैंक खातों में, जिनमें वार्षिक ब्याज दरें क्रमशः 5%, 8% तथा $8\frac{1}{2}\%$ है, जमा की जाती हैं । तीनों खातों से कुल मिलाकर ₹ 550 का वार्षिक ब्याज प्राप्त होता है । पहले दो खातों में, जिनकी ब्याज दरें 5% तथा 8% हैं, समान राशि जमा की जाती है । आव्यूह विधि की सहायता से ज्ञात कीजिए कि इन तीनों खातों में कितनी-कितनी राशि जमा की गई है ।

A total amount of ₹ 7,000 is deposited in three different savings bank accounts with annual interest rates of 5%, 8% and $8\frac{1}{2}\%$ respectively. The total annual interest from these three accounts is ₹ 550. Equal amounts have been deposited in the 5% and 8% savings accounts. Find the amount deposited in each of the three accounts, with the help of matrices.

29. एक गृहणी दो प्रकार के भोज्यों X तथा Y को इस प्रकार मिलाना चाहती है कि मिश्रण में कम-से-कम विटामिन A का घटक 10 मात्रक, विटामिन B का घटक 12 मात्रक व विटामिन C का घटक 8 मात्रक हो । दोनों भोज्यों की एक किग्रा मात्रा में विटामिन की मात्रा निम्न प्रकार से हैं :

	विटामिन A	विटामिन B	विटामिन C
भोज्य X	1	2	3
भोज्य Y	2	2	1

एक किग्रा भोज्य X का मूल्य ₹ 6, तथा भोज्य Y का मूल्य ₹ 10 है । वांछित आहार के लिए मिश्रण का न्यूनतम मूल्य ज्ञात कीजिए । उपर्युक्त को एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाकर ग्राफ द्वारा हल कीजिए । इस समस्या को आप किस मूल्य की प्राप्ति से जोड़ना चाहेंगे ?

A housewife wishes to mix together two kinds of food, X and Y, in such a way that the mixture contains at least 10 units of vitamin A, 12 units of vitamin B and 8 units of vitamin C. The vitamin contents of one kg of food is given below :

	Vitamin A	Vitamin B	Vitamin C
Food X	1	2	3
Food Y	2	2	1

One kg of food X costs ₹ 6 and one kg of food Y costs ₹ 10. Formulate the above problem as a linear programming problem and find the least cost of the mixture which will produce the diet graphically. What value will you like to attach with this problem ?

Q.No.	Value points 65/1/1	Marks
	SECTION A	
1 - 10	1. $\{0,2,4\}$ 2. $\frac{2}{3}$ 3. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 4. $\sqrt{b^2+c^2}$ 5. $3\hat{i}-6\hat{j}+6\hat{k}$	
	6. $40°$ 7. 0 8. $\tan x + \cot x + c$ 9. $-\cot x$ 10. 1	1×10
	SECTION B	
11.	(i) sum, difference and product of rational nos. is a unique rational number	$\frac{1}{2}$
	$\therefore$ For each $(a,b) \in S \times S$ there exists unique image $(a+b-ab)$ in S	$\frac{1}{2}$
	$\Rightarrow *$ is a function $\Rightarrow *$ is a binary operation on S	$\frac{1}{2}$
	(ii) $a*b = a+b-ab = b+a-ba = b*a$ $\therefore *$ is commutative	1m
	$a*(b*c) = a*(b+c-bc) = a+(b+c-bc)-a(b+c-bc)$	
	$= a+b+c-ab-bc-ca+abc$ — (1)	
	$(a*b)*c = (a+b-ab)*c = (a+b-ab)+c-(a+b-ab)c$	$1\frac{1}{2}$m
	$= a+b+c-ab-bc-ca+abc$ — (2)	
	From (1) & (2) $a*(b*c) = (a*b)*c \Rightarrow *$ is Associative.	
12.	$\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right) = \cot^{-1}\left(\frac{(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})+(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})}{(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})-(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})}\right)$ ...	2
	$= \cot^{-1}\left(\cot\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$	1+1
	OR	
	$2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x) \Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{2\cos x}{1-\cos^2 x}\right) = \tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$ ...	$1\frac{1}{2}$
	$\Rightarrow 2\cot x \cdot \operatorname{cosec} x = 2\operatorname{cosec} x$	1
	$\Rightarrow \cot x = 1 \quad \therefore x = \cot^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}+1$

Q.No.	Value points 65/1/1	Marks
13.	$\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a^2 & a^3 & abc \\ b^2 & b^3 & abc \\ c^2 & c^3 & abc \end{vmatrix}$ $\{R_1 \to aR_1 ;\ R_2 \to bR_2 ;\ R_3 \to cR_3\}$	$\frac{1}{2}$
	$= \begin{vmatrix} a^2 & a^3 & 1 \\ b^2 & b^3 & 1 \\ c^2 & c^3 & 1 \end{vmatrix}$ {Taking (abc) common from C_3}	$\frac{1}{2}$
	$= \begin{vmatrix} a^2 & a^3 & 1 \\ b^2-a^2 & b^3-a^3 & 0 \\ c^2-a^2 & c^3-a^3 & 0 \end{vmatrix}$ $(R_2 \to R_2 - R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1)$	$1\frac{1}{2}$
	$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a^2 & a^3 & 1 \\ b+a & b^2+ab+a^2 & 0 \\ c+a & c^2+ca+a^2 & 0 \end{vmatrix}$ {Taking common $b-a$, $c-a$ from R_2 & R_3 resp.	$\frac{1}{2}$
	$= (b-a)(c-a)(bc(c-b) + a(c^2-b^2))$	
	$= (a-b)(b-c)(c-a)(bc+ca+ab)$	1
14.	$\frac{dy}{dt} = at\sin t$; $\frac{dx}{dt} = at\cos t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \tan t$	$\frac{1}{2}+1$
	$\frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\sec^3 t}{at}$ $\therefore \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{8\sqrt{2}}{a\pi}$	$1+\frac{1}{2}$
15.	$(x-y) \cdot e^{\frac{x}{x-y}} = a \Rightarrow \log(x-y) + \frac{x}{x-y} = \log a$	1
	Differentiate w.r.t. "x"	
	$\Rightarrow \frac{1-y'}{x-y} + \frac{1\cdot(x-y) - x\cdot(1-y')}{(x-y)^2} = 0$	2
	$\Rightarrow (x-y)(1-y') + x - y - x(1-y') = 0$	
	$\Rightarrow yy' + x - 2y = 0$ or $y\frac{dy}{dx} + x = 2y$ }	1
	let r and s be the radius and the side of the square	
	$\therefore 2\pi r + 4s = k$ $\therefore s = \frac{k - 2\pi r}{4}$ ----	$\frac{1}{2}$
	Sum of their areas, $A = \pi r^2 + s^2 = \pi r^2 + \frac{1}{16}(k-2\pi r)^2$ ----	$\frac{1}{2}$
	$\frac{dA}{dr} = 2\pi r - \frac{\pi}{4}(k - 2\pi r)$; $\frac{dA}{dr} = 0 \Rightarrow r = \frac{k}{8+2\pi}$ ----	$1+\frac{1}{2}$
	$\frac{d^2A}{dr^2}\Big] = 2\pi + \frac{\pi^2}{2} > 0$ $\therefore$ Area is least iff $8r + 2\pi r = k$	

16.

OR

let $y = f(x) = x^{3/2}$, $x = 4$, $x + \Delta x = 3.968 \therefore \Delta x = -0.032$ .. 2

$\Delta y = \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=4} \cdot \Delta x = \frac{3}{2} \cdot x^{1/2}\Big]_{x=4} \cdot \Delta x = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot (-0.032) = -0.096$ .. 1

$(3.968)^{3/2} = f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y = 8 - 0.096 = 7.904$ .. 1

17.

$\int x^2 \sin x = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x \, dx$ .... $1\frac{1}{2}$

$= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x)$ ... $1\frac{1}{2}$

$\therefore \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx = \{-x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x)\}\Big]_0^{\pi/2} = \pi - 2$ ... 1

OR

$\int (x+3)\sqrt{3-4x-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\int (-2x-4)\sqrt{3-4x-x^2}\, dx + \int \sqrt{(\sqrt{7})^2 - (x+2)^2}\, dx$ 2

$= -\frac{1}{3}(3-4x-x^2)^{3/2} + \frac{x+2}{2}\sqrt{3-4x-x^2} + \frac{7}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{7}}\right) + c$ 2

$\left(\frac{2+\sin x}{1+y}\right)\frac{dy}{dx} = -\cos x \Rightarrow \frac{1}{1+y}\, dy = -\frac{\cos x}{2+\sin x}\, dx$ ... $\frac{1}{2}$

Integrating, weget

$\log|1+y| = -\log|2+\sin x| + \log c$ ... 1

$\Rightarrow (1+y)(2+\sin x) = c$, Putting $y(0) = 1$, weget $c = 4$ ... 1

$\therefore (1+y)(2+\sin x) = 4$ or $y = \frac{2-\sin x}{2+\sin x}$ ... $\frac{1}{2}$

$\therefore y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}$ ... 1

Given differential Equation can be written as:

$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{x-y} \Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+2v}{1-v}$, where $y = vx$ .. 1

$\Rightarrow \frac{v-1}{v^2+v+1}\, dv = -\frac{1}{x}\, dx$, Integrating both sides .... $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\int \frac{2v+1}{v^2+v+1}\, dv - \frac{3}{2}\int \frac{1}{v^2+v+1}\, dv = -\log|x|$ ... $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\log|v^2+v+1| - \sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2v+1}{\ }\right) = -\log|x| + c$ .. $1\frac{1}{2}$

Q.No.	Value points 65/1/1	Marks
20.	Equation of line can be written as: $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-7/2}{3} = \dfrac{z-5}{-6}$ ----	$1\frac{1}{2}$
	D-ratios of line are $2, 3, -6$ $\therefore$ D-cosines are $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{-6}{7}$ --	$1\frac{1}{2}$
	Vector Equation of line through $A(-1,2,3)$ and parallel to given line is $\vec{r} = -\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}+\lambda(2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k})$ ---	1
21.	$\vec{a}+\vec{b} = \hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$; $\vec{b}+\vec{c} = -\hat{i}+2\hat{j}$ ----	1
	$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$ ---	$1\frac{1}{2}$
	Area of parallelogram $= \frac{1}{2}\left|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})\right| = \frac{\sqrt{21}}{2}$ sq. units.	$1\frac{1}{2}$
	OR	
	$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\{(\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{c}+\vec{a})\} = (\vec{a}+\vec{b})\cdot\{\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{c}\}$ $(\vec{c}\times\vec{c}=\vec{0})$	$\frac{1}{2}$
	$= \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})+\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{b}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})+\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$	1
	$= \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ $\left\{\because \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{a}) = \vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})\right\}$ --	$\frac{1}{2}$
	$= 2\,\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ — (1) $= \vec{b}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ -- $= \vec{b}\cdot(\vec{b}\times\vec{a}) = 0$	$\frac{1}{2}$
	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are co-planar $\Rightarrow \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$ --	$\frac{1}{2}$
	$\therefore$ From (1), $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\{(\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{c}+\vec{a})\} = 0$	$\frac{1}{2}$
	$\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}$ are co-planar. ---	$\frac{1}{2}$
2.	let E_1: First ball is red, E_2: First ball is black; A: Second ball is red.	
	$P(E_1) = \frac{3}{10}$, $P(E_2) = \frac{7}{10}$, $P(A/E_1) = \frac{2}{9}$, $P(A/E_2) = \frac{3}{9}$ ----	2
	$P(E_1/A) = \dfrac{\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}}{\ldots} = \frac{6}{\ldots} = \frac{2}{\ldots}$	

Q.No.	Value points 65/1/1	Marks

SECTION C

23. Slope of tangent $= \frac{dy}{dx} = 2x-2$ ---- 1

(i) Tangent parallel to $2x-y+9=0$, $\therefore 2x-2=2$, $x=2, y=7$ ---- $1\frac{1}{2}$

Equation of tangent through (2,7) and parallel to line is

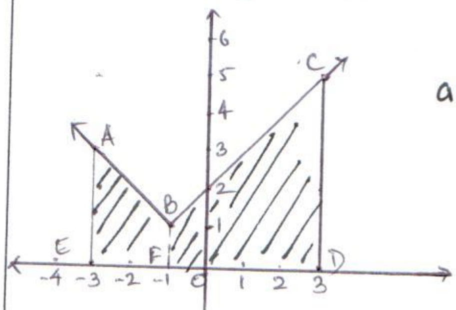
$y-7=2(x-2) \Rightarrow y=2x+3$ ---- 1

(ii) Tangent perpendicular to $5y-15x=13$ $\therefore (2x-2)\cdot 3=-1$

$\therefore x=\frac{5}{6}, \; y=\frac{217}{36}$. ---- $1\frac{1}{2}$

Equation of tangent through $\left(\frac{5}{6}, \frac{217}{36}\right)$ and perpendicular to line is

$y-\frac{217}{36}=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{5}{6}\right) \Rightarrow y=\frac{-x}{3}+\frac{227}{36}$ or $12x+36y=227$ ---- 1

24 

Correct Graph. ---- $1\frac{1}{2}$

area(EABCDE) = ar(ABFE) + ar(CBFD)

$= \int_{-3}^{-1}(|x+1|+1)\,dx + \int_{-1}^{3}(|x+1|+1)\,dx$ ---- 1

$= \int_{-3}^{-1}(-x)\,dx + \int_{-1}^{3}(x+2)\,dx$ ---- $1\frac{1}{2}$

$= -\frac{x^2}{2}\Big]_{-3}^{-1} + \frac{(x+2)^2}{2}\Big]_{-1}^{3}$ ---- 1

$= -\frac{1}{2}(1-9) + \frac{1}{2}(25-1) = 16$ sq. units ---- 1

25. let $x^2=t$ $\therefore \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{t}{(t+1)(t+4)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+4}$ ---- 1

Getting, $A=-\frac{1}{3}, \; B=\frac{4}{3}$ ---- 2

$\therefore \int \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = -\frac{1}{3}\int\frac{1}{x^2+1}dx + \frac{4}{3}\int\frac{1}{x^2+4}dx$

$= -\frac{1}{3}\tan^{-1}x + \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$ ---- 3

OR

let, $I = \int_0^{\pi}\frac{x\tan x}{\sec x+\tan x}dx$ —(1) $\therefore I = \int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\tan(\pi-x)}{\sec(\pi-x)+\tan(\pi-x)}dx = \int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\tan x}{\sec x+\tan x}dx$ —(2) ---- $1\frac{1}{2}$

Add (1) & (2), $2I = \pi\int_0^{\pi}\frac{\tan x}{\sec x+\tan x}dx = \pi\int_0^{\pi}\tan x(\sec x-\tan x)\,dx$ ---- 1

Q.No.	Value points 65/1/1	Marks
26.	let Equation of plane through $(1,2,-4)$ be $a(x-1)+b(y-2)+c(z+4)=0 \quad -(1)$	1
	The plane is parallel to the given lines $\therefore\ 2a+3b+6c=0\ ;\ a+b-c=0$	1
	Solving: $\frac{a}{-9}=\frac{b}{8}=\frac{c}{-1}=k(\text{say})\ \therefore a=-9k, b=8k, c=-k$	1
	From (1): $-9k(x-1)+8k(y-2)-k(z+4)=0$	
	$\therefore$ Equation of plane in cartesian form is $9x-8y+z+11=0$	1
	vector form of plane is: $\vec{r}.(9\hat{i}-8\hat{j}+\hat{k})=-11$	1
	Distance of $(9,-8,-10)$ from the plane $=\left\lvert\frac{9.9-8(-8)+1(-10)+11}{\sqrt{81+64+1}}\right\rvert=\sqrt{146}$	1
27.	let S = Sample space of the Experiment $=\{HT, HH, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$	1
	A = Event that die shows a no. greater than 4 $=\{T5, T6\}$	
	B = Event that there is atleast one tail $=\{HT, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$	
	$A\cap B=\{T5, T6\}$	
	$P(A\cap B)=P(T5)+P(T6)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$	2
	$P(B)=P(HT)+P(T1)+P(T2)+P(T3)+P(T4)+P(T5)+P(T6)$ $=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{4}$	2
	$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1/6}{3/4}=\frac{2}{9}$	1
	OR	
	E_1 = Event that 1 occurs ; E_2 = Event that 1 does not occur; A = Event that the man reports that 1 occurs	1
	$P(E_1)=\frac{1}{6}\ ;\ P(E_2)=\frac{5}{6}\ ;\ P(A/E_1)=\frac{3}{5}\ ;\ P(A/E_2)=\frac{2}{5}$.	$2\frac{1}{2}$
	$P(E_1/A)=\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}+\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{5}}=\frac{3}{13}$.	$2\frac{1}{2}$

Q.No.	Value points 65/1/1	Marks

28. let ₹ x, y and z be invested in saving accounts at the rate 5%, 8% and $8\frac{1}{2}$% respectively. Then the system of equations is

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 7000 \\ \frac{5x}{100}+\frac{8y}{100}+\frac{17z}{200} &= 550 \Rightarrow 10x+16y+17z=110000 \\ x-y &= 0 \end{aligned}\right\}$$ $1\frac{1}{2}$

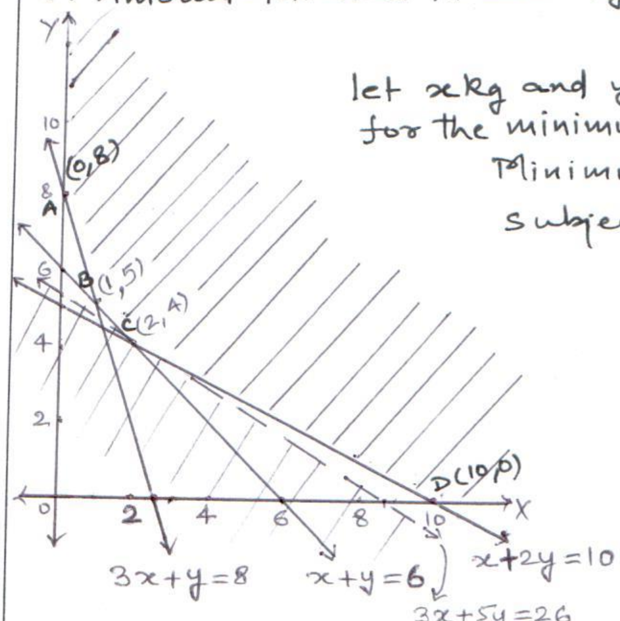
Matrix equation is $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 16 & 17 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7000 \\ 110000 \\ 0 \end{bmatrix}$ i.e $A \cdot X = B$ 1

$|A| = 1\cdot(0+17) - 1(0-17) + 1(-10-16) = 8 \neq 0 \therefore A^{-1}$ exists 1

Co-factors are: $\left.\begin{aligned} A_{11} &= 17, & A_{12} &= 17, & A_{13} &= -26 \\ A_{21} &= -1, & A_{22} &= -1, & A_{23} &= 2 \\ A_{31} &= 1, & A_{32} &= -7, & A_{33} &= 6 \end{aligned}\right\}$ 1

$X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 17 & -1 & 1 \\ 17 & -1 & -7 \\ -26 & 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7000 \\ 110000 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1125 \\ 1125 \\ 4750 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 1125 \\ y &= 1125 \\ z &= 4750 \end{aligned}\right\}$ $1\frac{1}{2}$

$\therefore$ Amount invested in each type of account is ₹ 1125, ₹ 1125 and ₹ 4750 resp.

29. 

let x kg and y kg of food X and Y be mixed for the minimum cost of mixture then L.P.P. is

Minimise, $z = 6x + 10y$

subject to: $\left.\begin{aligned} x+2y &\geq 10 \\ 2x+2y \geq 12 &\Rightarrow x+y \geq 6 \\ 3x+y &\geq 8 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}\right\}$ ... 2

Correct Graph ... 2

Corner	Value of z
(0,8)	₹ 80
(1,5)	₹ 56
(2,4)	₹ 52 (Minimum)
(10,0)	₹ 60

1

Region is unbounded

z 52 i.e. $6x+10y < 52$ or $3x+5y < 52$ has no point common with feasible region $\therefore$ the L.P.P has optimum